OLIMPADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALĂ
26 ianuarie 2013

CLASA A XII-A
Programa M1

1.) În mulţimea $G=(-1-a,1+a)$, $a>0$ definim operaţia $x*y=\dfrac{(x+y)(1+a)^2}{xy+(1+a)^2}$.

a) Să se demonstreze că $(G,*)$ este grup abelian.

b) Dacă $\alpha=\dfrac{1+a}{2}$ să se calculeze valoarea lui $\alpha*\alpha*.....*\alpha$ (de *n*-ori α).

2.) Să se determine automorfismele grupului $(Z,\circ)$, $x\circ y= x+y-1, \forall x,y\in Z$.

3.) Se dă funcţia $f:R\to R,\ f(x)=xe^x$ şi $F_0:R\to R$ aceea primitivă a lui *f* a cărei grafic trece prin punctul (0, –1). În mulţimea $G=\{F_c:R\to R, F_c=F_0+c, c\in R\setminus\{1\}\}$ definim operaţia * astfel: $F_a*F_b=F_{ab-a-b+2}$.

a) Să se demonstreze că $(G,*)$este grup abelian.

b) Să se determine numărul real *c* pentru care $(F_2\circ F_2)(1)=(F_c*F_c)(1)$, unde ° înseamnă compunerea funcţiilor.

4.) Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(0)=1$ și care admit primitive $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $F(x)-f(x)=\sin^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.
Timp de lucru 3 ore